Fen-Edebiyat Fakültesi	**FİNAL SINAV KAĞIDI**	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 24 Ocak 2025	

Süre 75dk. Formüller:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi.$$

1. (30 puan) Aşağıdaki sınır değer problemini ele alınız:

$$X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi,$$

$$X(0) = 0, \qquad X(\pi) = 0.$$

Bu problem için özdeğerleri ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonları bulunuz. (İpucu: Karakteristik denklemin köklerinin gerçek veya kompleks olmasına göre durumları inceleyiniz.)

$\lambda_n =$

$X_n(x) =$

Çözüm: Denklem sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir. Karakteristik denklem

$$r^2 + 2r - \lambda = 0$$

şeklindedir. Buradan

$$r = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}$$

elde edilir. Şimdi λ'ya göre durumları inceleyelim.

1) $\lambda > -1$: Bu durumda $\sqrt{1+\lambda} = k > 0$ gerçektir ve genel çözüm

$$X(x) = C_1 e^{(-1+k)x} + C_2 e^{(-1-k)x}$$

şeklindedir. Sınır koşulları:

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(\pi) = 0 \Rightarrow C_1 e^{(-1+k)\pi} + C_2 e^{(-1-k)\pi} = 0.$$

Bu iki denklem birlikte yalnızca $C_1 = C_2 = 0$ çözümünü verir. Dolayısıyla bu aralıkta özdeğer yoktur.

2) $\lambda = -1$: Bu durumda çift kök vardır: $r = -1$. Genel çözüm

$$X(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$$

olur.

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \qquad X(\pi) = 0 \Rightarrow C_2 \pi e^{-\pi} = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Yalnızca trivial çözüm elde edilir; dolayısıyla $\lambda = -1$ özdeğer değildir.

3) $\lambda < -1$: Bu durumda $1+\lambda < 0$ ve

$$\sqrt{1+\lambda} = i\mu, \qquad \mu = \sqrt{-(1+\lambda)} > 0.$$

Kökler

$$r = -1 \pm i\mu$$

olur ve genel çözüm

$$X(x) = e^{-x}\big(C_1\cos(\mu x) + C_2\sin(\mu x)\big)$$

şeklindedir. Sınır koşulları:

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$X(\pi) = 0 \Rightarrow e^{-\pi}C_2\sin(\mu\pi) = 0.$$

Sıfırdan farklı çözüm için

$$\sin(\mu\pi) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mu = n, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

olmalıdır. Buna göre

$$\lambda = -1-\mu^2 = -1-n^2.$$

Sonuç olarak özdeğerler ve özfonksiyonlar (sabit çarpana kadar):

$$\boxed{\lambda_n = -1-n^2, \qquad n = 1,2,3,\ldots}$$

$$\boxed{X_n(x) = e^{-x}\sin(nx)}.$$

Bu problemde yalnızca $\lambda < -1$ için sıfırdan farklı çözümler mevcuttur.

2. (30 puan) Aşağıdaki ikinci mertebe kısmi diferansiyel denklemi ele alınız:

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} + 2u_x - 6u_y = 0.$$

a) Denklemin tipini (eliptik, hiperbolik veya parabolik) belirleyiniz.

b) Karakteristik denklemleri bularak uygun değişken dönüşümünün $\xi = y + x$ ve $\eta = y + 3x$ olduğunu gösteriniz. Jakobiyen determinantı hesaplayarak bu dönüşümün $\mathbb{R}^2$ üzerinde yerel olarak tersinir olduğunu gösteriniz.

c) Denklemi yeni değişkenler cinsinden kanonik forma indiriniz.

d) Kanonik forma indirgenmiş denklemin ve orijinal denklemin genel çözümlerini bulunuz.

Çözüm:

1) Denklemin tipi

Genel ikinci mertebe doğrusal PDE

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$$

şeklindedir. Burada

$$A = 1, \qquad 2B = -4 \Rightarrow B = -2, \qquad C = 3.$$

Ayrım belirleyicisi

$$\Delta = B^2 - AC = (-2)^2 - (1)(3) = 4 - 3 = 1 > 0$$

olduğundan denklem **hiperboliktir**.

2) Karakteristik eğriler

Karakteristikler

$$A(dy)^2 - 2B\,dx\,dy + C(dx)^2 = 0$$

ile verilir. Yerine koyarsak:

$$(dy)^2 + 4\,dx\,dy + 3(dx)^2 = 0.$$

dx'e bölelim:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\frac{dy}{dx} + 3 = 0.$$

Bu ikinci dereceden denklemden

$$\frac{dy}{dx} = -1, \qquad \frac{dy}{dx} = -3$$

elde edilir.

Buna karşılık gelen karakteristik değişkenler:

$$\xi = y + x, \qquad \eta = y + 3x.$$

Jakobiyen determinantı:

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -2 \neq 0$$

olduğundan dönüşüm tersinirdir.

3) Kanonik form

Bu dönüşüm altında

$$u(x,y) = U(\xi,\eta).$$

Zincir kuralı ile:

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + 3U_\eta,$$

$$u_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y = U_\xi + U_\eta.$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 6U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + 3U_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

İkinci mertebe kısmın sadeleşmesi:

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy}$$

$$= (1-4+3)U_{\xi\xi} + (6-16+6)U_{\xi\eta} + (9-12+3)U_{\eta\eta}$$
$$= -4\,U_{\xi\eta}.$$

Birinci mertebe sadeleşmesi:

$$2u_x - 6u_y = 2(U_\xi + 3U_\eta) - 6(U_\xi + U_\eta) = -4U_\xi.$$

Yeni koordinatlarda denklem

Tüm terimler birleştirildiğinde denklem

$$-4U_{\xi\eta} - 4U_\xi = 0$$

şeklini alır. Sadeleştirirsek:

$$\boxed{U_{\xi\eta} + U_\xi = 0.}$$

Denklemin çözümü:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}+U\right)=0$$

ξ'ye göre integre edersek:

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}+U=f(\eta)$$

İntegral çarpanı:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(e^{\eta}U\right)=e^{\eta}f(\eta)$$

η'ye göre integre edersek:

$$e^{\eta}U=\int e^{\eta}f(\eta)\,d\eta+G(\xi)=F(\eta)+G(\xi)$$

$$U=e^{-\eta}(F(\eta)+G(\xi))$$

$$u=e^{-(y+3x)}(F(y+3x)+G(y+x))$$

3. (20 puan) Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini çözünüz:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = t + e^x, \qquad -\infty < x < \infty, \; t > 0,$$

$$u(x,0) = x^2, \qquad u_t(x,0) = 1.$$

Çözüm: Önce

$$v_{tt} - 4v_{xx} = t + e^x$$

denkleminin bir özel çözümünü bulalım. Sağ taraf t ve x değişkenlerinde ayrıştığı için

$$v(x,t) = v_1(t) + v_2(x)$$

şeklinde arayalım.

(i) t-parçası: $v_1 = v_1(t)$ için

$$(v_1)_{tt} = t \quad \Longrightarrow \quad v_1(t) = \frac{t^3}{6}.$$

(ii) x-parçası: $v_2 = v_2(x)$ için

$$-4(v_2)_{xx} = e^x \quad \Longrightarrow \quad (v_2)_{xx} = -\frac{1}{4}e^x.$$

Bundan

$$v_2(x) = -\frac{1}{4}e^x$$

seçilebilir (çünkü $(e^x)'' = e^x$).

Dolayısıyla bir özel çözüm:

$$v(x,t) = \frac{t^3}{6} - \frac{1}{4}e^x.$$

Bu özel çözüm için başlangıç değerleri:

$$v(x,0) = -\frac{1}{4}e^x, \qquad v_t(x,0) = 0.$$

Şimdi

$$w = u - v$$

tanımlayalım. O hâlde

$$w_{tt} - 4w_{xx} = 0,$$

ve başlangıç koşulları

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = x^2 + \frac{1}{4}e^x, \qquad w_t(x,0) = u_t(x,0) - v_t(x,0) = 1$$

olur.

Homojen dalga denklemi için d'Alembert formülü:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)\,d\xi,$$

burada

$$\phi(x) = x^2 + \frac{1}{4}e^x, \qquad \psi(x) = 1.$$

İkinci terim:

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 1\,d\xi = \frac{1}{2c}\big((x+ct)-(x-ct)\big) = t.$$

Birinci terim:

$$\frac{1}{2}\Big(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\Big) = \frac{1}{2}\Big((x+ct)^2+(x-ct)^2\Big) + \frac{1}{8}\Big(e^{x+2t}+e^{x-2t}\Big).$$

Buradan

$$\frac{1}{2}\Big((x+2t)^2+(x-2t)^2\Big) = x^2+4t^2,$$

Dolayısıyla

$$w(x,t) = x^2+4t^2+\frac{1}{8}\Big(e^{x+2t}+e^{x-2t}\Big)+t.$$

Son olarak

$$u = w + v$$

olduğundan

$$\boxed{u(x,t) = \Big(x^2+4t^2+\frac{1}{8}\Big(e^{x+2t}+e^{x-2t}\Big)+t\Big)+\Big(\frac{t^3}{6}-\frac{1}{4}e^x\Big).}$$

4. (20 puan) Aşağıdaki bir boyutlu dalga denklemini ele alınız:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x)$$

Dalgaya ait seri çözümün

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)\Big) \sin(nx)$$

şeklinde olduğu biliniyor.

a) $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx$ ve $B_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(nx)\,dx$ olduğunu gösteriniz.

b) $f(x) = 3\sin x - 4\sin 3x$ ve $g(x) = 5\sin 2x - 6\sin 3x$ durumunda $u(x,t)$ çözümünü bulunuz.

Çözüm:

1) Katsayıların bulunması.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)$$

elde edilir. Her iki tarafı $\sin(mx)$ ile çarpıp $[0,\pi]$ aralığında integre edelim:

$$\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,dx.$$

Sinüs fonksiyonlarının ortogonalliğinden

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = m, \end{cases}$$

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,dx.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx.}$$

Zaman türevi alınırsa

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(-nA_n \sin(nt) + nB_n \cos(nt)\big)\sin(nx).$$

$t = 0$ için

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin(nx).$$

Yine $\sin(mx)$ ile çarpıp integre edilirse

$$\int_0^{\pi} g(x)\sin(mx)\,dx = mB_m\frac{\pi}{2},$$

buradan

$$\boxed{B_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx.}$$

b) $f(x) = 3\sin x - 4\sin 3x$**,** $g(x) = 5\sin 2x - 6\sin 3x$**.**

Bu fonksiyonlar zaten sinüs bazında verildiğinden katsayılar doğrudan okunur:

$$A_1 = 3, \qquad A_3 = -4, \qquad A_n = 0\ (n \neq 1,3),$$

$$2B_2 = 5 \Rightarrow B_2 = \frac{5}{2}, \qquad 3B_3 = -6 \Rightarrow B_3 = -2, \qquad B_n = 0\ (n \neq 2,3).$$

Sonuç:

$$\boxed{u(x,t) = 3\cos(t)\sin x + \frac{5}{2}\sin(2t)\sin(2x) + \big(-4\cos(3t) - 2\sin(3t)\big)\sin(3x).}$$